2022届高三第二次T8联考

数学试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	C	A	D	D	C	ACD	ABD	ABD	ACD

1.【答案】A

【解析】$z=\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\mathrm{i}=0$，故 $\bar{z}=0$，选 A.

2.【答案】C

【解析】$\log_2(x-1)<2\Leftrightarrow 0<x-1<4\Leftrightarrow 1<x<5$，$\therefore A=\{x|\log_2(x-1)<2\}=\{x|1<x<5\}$，即 $A\subseteq B$，选 C.

3.【答案】B

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_3=S_9$，得 $3a_1+3d=9a_1+36d$，$a_1=-\frac{11}{2}d$，故 $d>0$. $S_n=-\frac{11}{2}dn+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2-6dn=\frac{d}{2}(n-6)^2-18d$，故当 $n=6$ 时，S_n 取得最小值，选 B.

4.【答案】C

【解析】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AN}=0+|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{FA}|\cos\frac{\pi}{4}+|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}|\cos\frac{3\pi}{4}+0=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$，选 C.

5.【答案】A

【解析】$f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得 $g(x)=2\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，向右平移 $\varphi\ (\varphi>0)$ 个单位长度得 $h(x)=2\sin\left(2(x-\varphi)-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x-2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，由题意得 $-2\varphi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $\varphi>0$，故 φ 的最小值为 $\frac{2}{3}\pi$，选 A.

6.【答案】D

【解析】由 $V_{B-AEF}=\frac{1}{3}V_{B-ACD}$ 得 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}$. 又由于 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot\sin\angle EAF$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD$，得 $AE\cdot AF=\frac{AC\cdot AD}{3}=\frac{1}{3}$. 在 $\triangle AEF$ 中，由余弦定理得 $EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos\angle EAF=AE^2+AF^2-AE\cdot AF\geqslant 2AE\cdot AF-AE\cdot AF=\frac{1}{3}$，当且仅当 $AE=AF=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等，$\therefore EF$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，选 D.

7.【答案】D

【解析】$f(x+2)+f(x)=0$，得 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$ 的周期为 4. $f(-\ln 2)=f(\ln 2)$，$\ln 2\in(0,1)$ 为无理数，$\therefore f(-\ln 2)=0$，$f\left(\frac{2022}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)=R\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$，$f(-\ln 2)-f\left(\frac{2022}{5}\right)=-\frac{1}{5}$，选 D.

8.【答案】C

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，AP 中点为 $M(x_M,y_M)$. 则由点差法可得 $k_{AP}\cdot k_{MO}=-\frac{3}{4}$，又由题设可知 $k_{AP}\cdot k_{MG}=-1$，$\therefore k_{MG}=\frac{4}{3}k_{MO}=\frac{4}{3}\frac{y_M}{x_M}$. 则直线 MG 的方程为 $y-y_M=\frac{4}{3}\frac{y_M}{x_M}(x-x_M)$. 由题意有，$G$ 点在 x 轴上，故令 $y=0$，得 $x=\frac{x_M}{4}$，G 点坐标为 $\left(\frac{x_M}{4},0\right)$，易知 $x_M>-1$，$|F_1G|=\left|\frac{x_M}{4}+1\right|=\frac{x_M}{4}+1$，又由焦半径公式可得 $|AP|=|AF_1|+|F_1P|=\frac{1}{2}x_1+2+\frac{1}{2}x_2+2=x_M+4$，$\therefore\frac{|PA|}{|GF_1|}=4$. 故选 C.

9.【答案】ACD

【解析】事件 A,B 相互独立，$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$，A 选项正确；随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，$P\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=2P\left(X<\frac{1}{2}\right)-1$，B 选项错误；在回归分析中，样本相关系数 $|r|$ 越接近 1，样本数据的线性相关程度越强，C 选项正确；在回归分析中，若残差平方和越大，说明模型的拟合效果越差，D 选项正确.

10.【答案】ABD

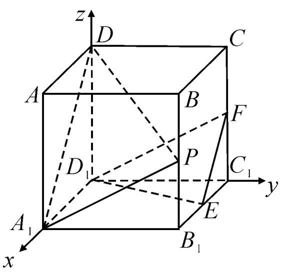
【解析】当 $x,y<0$ 时，$x^3+y^3-3xy<0$，故第三象限内的点不可能在曲线上，A 选项正确；将点 (y,x) 代入曲线方程得 $x^3+y^3-3xy=0$，故曲线关于直线 $y=x$ 对称，B 选项正确；联立 $\begin{cases}x^3+y^3-3xy=0,\\x+y=-1,\end{cases}$ $x^3+y^3-3xy=(x+y)(x^2+y^2-xy)-3xy=0$，将 $x+y=-1$ 代入得 $-(x+y)^2=0$，即 $x+y=0$，方程组无解，曲线与直线 $x+y=-1$ 无公共点，C 选项错误，D 选项正确.

11.【答案】ABD

【解析】$\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b=1\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b}$，$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{a+b}{2}\leqslant-\ln 2$，$a+b\leqslant-2\ln 2$，A 选项正确；$0<\mathrm{e}^a,\mathrm{e}^b<1$，$\therefore a,b<0$，$\mathrm{e}^a+b=1-\mathrm{e}^b+b$，令 $f(x)=1+x-\mathrm{e}^x$，$f'(x)=1-\mathrm{e}^x$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$f(b)<f(0)=0$，即 $1-\mathrm{e}^b+b<0$，B 选项正确；当 $a=b=-\ln 2$ 时，$ab=\ln^2 2<1$，C 选项错误；$2(\mathrm{e}^{2a}+\mathrm{e}^{2b})\geqslant(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)^2$

$=1$，D 选项正确．

12.【答案】ACD



【解析】分别取 B_1C_1，C_1C 中点 E，F，连接 D_1E，D_1F，EF，$D_1F // A_1P$，$D_1F \not\subset$ 平面 A_1PD，$A_1P \subset$ 平面 A_1PD，$D_1F //$ 平面 A_1PD，同理可得 $EF //$ 平面 A_1PD，$D_1F \cap EF = F$，$\therefore$ 平面 $A_1PD //$ 平面 D_1EF，则 Q 点的轨迹为线段 EF，A 选项正确；以直线 D_1A_1 为 x 轴，D_1C_1 为 y 轴，D_1D 为 z 轴，建立如图所示空间直角坐标系．$A_1(1,0,0)$，$D(0,0,1)$，$P\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，设 $Q(x,1,z)$，$0 \leqslant x,z \leqslant 1$．

$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A_1P}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1,z)$．

设 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$ 为平面 A_1PD 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a+c=0,\\ b+\frac{c}{2}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=c,\\ b=-\frac{c}{2},\end{cases}$ 取 $c=1$，$\boldsymbol{m}=\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$．若 $D_1Q \perp$ 平面 A_1PD，那么 $\overrightarrow{D_1Q} // \boldsymbol{m}$，即存在 $\lambda \in \mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\boldsymbol{m}$，$\begin{cases}x=\lambda\\ 1=-\frac{\lambda}{2},\\ z=\lambda\end{cases}$ 解得 $x=z=-2 \notin [0,1]$，故不存在点 Q 使得 $D_1Q \perp$ 平面 A_1PD，B 选项错误；$\triangle A_1PD$ 的面积为定值，$\therefore$ 当且仅当 Q 到平面 A_1PD 的距离 d 最大时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大．$d=\frac{|\overrightarrow{A_1Q}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{2}{3}\left|x+z-\frac{3}{2}\right|$，①$x+z \leqslant \frac{3}{2}$，$d=1-\frac{2}{3}(x+z)$，则当 $x+z=0$ 时，d 有最大值 1．②$x+z>\frac{3}{2}$，$d=\frac{2}{3}(x+z)-1$，则当 $x+z=2$ 时，d 有最大值 $\frac{1}{3}$．综上，当 $x+z=0$，即 Q 和 C_1 重合时，d 有最大值，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大，C 选项正确；$D_1C_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore D_1C_1 \perp C_1Q$，$D_1Q=\sqrt{D_1C_1{}^2+C_1Q^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore C_1Q=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$Q$ 点的轨迹为半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ 的圆弧，轨迹长度为 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$，D 选项正确．

13.【答案】$\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{14}$

【解析】展开式的通项：$T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r=C_8^r a^r x^{8-2r}$，由题意有 $1+C_8^2a^2=2C_8^1a$，解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{14}$．

14.【答案】$\frac{\sqrt{35}}{2}$

【解析】圆 $x^2+y^2=r^2$ 的圆心 $(0,0)$ 到直线 $x-y=2$ 的距离 $d=\frac{|0-0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，则所截弦长为 $2\sqrt{r^2-2}$，同理直线 $x-y=4$ 截圆 $x^2+y^2=r^2$ 所得的弦长为 $2\sqrt{r^2-8}$．由题意有 $2\sqrt{r^2-2}:2\sqrt{r^2-8}=3:1$，解得 $r^2=\frac{35}{4}$，$r>0$，故 $r=\frac{\sqrt{35}}{2}$．

15.【答案】$\frac{72}{125}$

【解析】每个人有 5 种选择，四人共有 5^4 种选法；其中恰有两人参加同一拓展活动共有 $C_4^2C_5^1A_4^2$ 种选法，故四人中恰有两人参加同一拓展活动的概率为 $\frac{C_4^2C_5^1A_4^2}{5^4}=\frac{72}{125}$．

16.【答案】$\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup[e^2,+\infty)$

【解析】①$0<x_1<x_2<1$，$f(x_2)=x_2=ef(x_1)=ex_1 \in (0,1)$，$x_1 \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$，$x_1 \cdot f(x_2)=x_1x_2=ex_1^2 \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$；②$0<x_1<1 \leqslant x_2$，$ef(x_1)=ex_1 \in (0,e)$，$f(x_2)=e^{x_2} \geqslant e$，故不存在 x_1，x_2 使得 $f(x_2)=ef(x_1)$；③$1 \leqslant x_1<x_2$，$f(x_2)=e^{x_2}=ef(x_1)=e\cdot e^{x_1}$，$x_2=1+x_1$，$x_1\cdot f(x_2)=x_1e^{x_2}=x_1e^{x_1+1}$，令 $g(x)=xe^{x+1}$，当 $x \geqslant 1$ 时，$g'(x)=(x+1)e^{x+1}>0$，$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$x_1\cdot f(x_2)=g(x_1) \geqslant g(1)=e^2$．综上所述，$x_1\cdot f(x_2)$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup[e^2,+\infty)$．

17.【解析】(1) $\because C=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \cos B=\frac{a}{c}=\frac{c-a}{2a}$，整理得 $2a^2-c^2+ac=0$，$(2a-c)(a+c)=0$．…………………… 3 分

$\because a+c>0$，$\therefore 2a-c=0$，$2a=c$．

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，$\because B \in (0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$．…………… 5 分

(2) $c=AB=3$，$BD=AB-AD=2$，$BC=AB\cos B=\frac{3}{2}$．

……………………………………………………… 6 分

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos B=\frac{9}{4}+4-2\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{4}$，$CD=\frac{\sqrt{13}}{2}$．…

……………………………………………………… 8 分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

$\sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin B}{CD}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$．……… 10 分

18.【解析】(1)证明：取 A_1C_1 中点 G，连接 FG，B_1G．

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，$CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

$\because B_1G \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore B_1G \perp CC_1$．

$\because A_1B_1=B_1C_1$，G 为 A_1C_1 中点，$\therefore B_1G \perp A_1C_1$，

$A_1C_1 \cap CC_1=C_1$，$\therefore B_1G \perp$ 平面 AA_1C_1C．① …… 3 分

$\because G$ 为 A_1C_1 中点，F 为 A_1C 中点，$FG // CC_1$ 且 $FG=\frac{1}{2}CC_1$．

$\because E$ 为 BB_1 中点，$B_1E=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}CC_1=FG$．又 B_1E

$// CC_1$，∴$FG // B_1E$ 且 $FG = B_1E$，四边形B_1EFG为平行四边形，$EF // B_1G$. ② …………………… 5 分

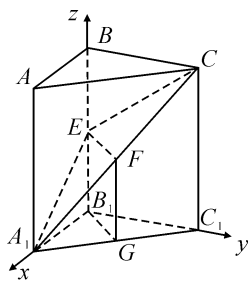
综合①②可知，$EF \perp$ 平面 AA_1C_1C. …………………… 6 分

(2) $AC = \sqrt{2}$，$AB = BC = 1$，

∴$\angle ABC$为直角，$AB \perp BC$，

则$A_1B_1 \perp B_1C_1$.

以直线B_1A_1为 x 轴，B_1C_1为 y 轴，B_1B 为 z 轴，建立如图所示空间直角坐标系. ……… 7 分



设 AA_1 的长为 $x(x>0)$.

则$A_1(1,0,0)$，$C(0,1,x)$，$A(1,0,x)$，$E(0,0,\frac{x}{2})$.

$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,x)$，$\overrightarrow{EA_1}=\left(1,0,-\frac{x}{2}\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(0,1,\frac{x}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$为平面A_1EA 的一个法向量，

$\boldsymbol{n}=(r,s,t)$为平面A_1EC 的一个法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a-\frac{cx}{2}=0,\\ cx=0,\end{cases}$得 $a=c=0$，取 $b=1$，

$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$. …………………… 8 分

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}r-\frac{tx}{2}=0,\\ s+\frac{tx}{2}=0,\end{cases}$取 $t=2$，得 $r=x$，$s=-x$，

$\boldsymbol{n}=(x,-x,2)$. …………………… 10 分

二面角 $C-A_1E-A$ 的大小为$\frac{\pi}{3}$，则 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-x|}{\sqrt{x^2+x^2+4}}=\frac{1}{2}$.

解得$x^2=2$，$x>0$，∴$x=\sqrt{2}$.

故AA_1的长为$\sqrt{2}$. …………………… 12 分

19.【解析】(1)解：当 $n=1$ 时，$2S_1+1=2a_1+1=3a_1$，解得$a_1=S_1=1$. …………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_n+1=3a_n=3(S_n-S_{n-1})$，$S_n=3S_{n-1}+1$. …………………… 2 分

即$S_n+\frac{1}{2}=3\left(S_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$，$S_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq 0$，∴$\{S_n+\frac{1}{2}\}$是以$\frac{3}{2}$为首项，3 为公比的等比数列，$S_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，$S_n=\frac{3^n-1}{2}$. …………………… 6 分

(2)证明：由$S_n=\frac{3^n-1}{2}$，得$a_n=\frac{2S_n+1}{3}=3^{n-1}$，…… 7 分

则 $2S_n+\frac{3}{a_n}=3^n-1+\frac{9}{3^n}$，…………………… 8 分

令 $t=3^n$，$n\geqslant 2$，则 $t\geqslant 9$.

∵$f(t)=t-1+\frac{9}{t}$在$[3,+\infty)$上单调递增，

∴$f(t)\geqslant f(9)=9$，即$3^n-1+\frac{9}{3^n}\geqslant 9$，当且仅当 $n=2$ 时取等，原命题得证. …………………… 12 分

20.【解析】(1)当纪念品销售价格为 100 元/件时，100 名消费者中有 90 人购买该纪念品，所以消费者购买该纪念品的概率为 0.9. …………………… 2 分

$X\sim B(4,0.9)$，$P(X=k)=C_4^k\cdot 0.9^k\cdot 0.1^{4-k}(k=0,1,2,3,4)$，

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.0001	0.0036	0.0486	0.2916	0.6561

…………………… 5 分

X 的数学期望$E(X)=4\times 0.9=3.6$. ………… 6 分

(2)设购买该纪念品的总人数为 Z，则 $Y=(x-80)Z$，$E(Y)=(x-80)E(Z)$；…………………… 8 分

① 当 $90<x\leqslant 100$ 时，$Z\sim B(M,0.9)$，$E(Z)=0.9M$，$E(Y)=0.9(x-80)M$，当 $x=100$ 时，$E(Y)$有最大值 $18M$； …………………… 9 分

② 当 $100<x\leqslant 110$ 时，$Z\sim B(M,0.7)$，$E(Z)=0.7M$，$E(Y)=0.7(x-80)M$，当 $x=110$ 时，$E(Y)$有最大值 $21M$；…………………… 10 分

③ 当 $110<x\leqslant 120$ 时，$Z\sim B(M,0.2)$，$E(Z)=0.2M$，$E(Y)=0.2(x-80)M$，当 $x=120$ 时，$E(Y)$有最大值 $8M$； …………………… 11 分

综上所述，当 $x=110$ 时，公司售卖该纪念品所得总利润 Y 的期望值最大，该纪念品的销售价格应定为 110 元/件. …

…………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}a$①，

将点 $P(\sqrt{3},\sqrt{6})$代入双曲线方程得$\frac{3}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1$②，

联立①②解得$\begin{cases}a^2=1,\\ b^2=3,\end{cases}$故 Γ 的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ……

…………………… 4 分

(2)选①：易知直线l_1，l_2的斜率均存在且不为 0，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，直线l_1的斜率为 k，直线l_2的斜率为$-\frac{1}{k}$. l_1的方程为 $y=kx$，l_2的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$.

$\begin{cases}y=kx,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得$(3-k^2)x^2-3=0$.

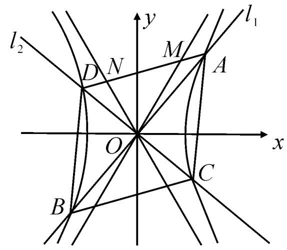
直线l_1与双曲线 Γ 交于两点，故 $3-k^2\neq 0$ 且$\Delta_1=12(3-k^2)>0$，$k^2<3$，…………………… 6 分

$x_1=\sqrt{\frac{3}{3-k^2}}$，$x_2=-\sqrt{\frac{3}{3-k^2}}$，则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{\frac{3(1+k^2)}{3-k^2}}$. …………………… 7 分

$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得$(3k^2-1)x^2-3k^2=0$.

直线l_2与双曲线Γ交于两点，故$3k^2-1\neq0$且$\Delta_2=12k^2(3k^2-1)>0$，$k^2>\frac{1}{3}$，

$x_3=\sqrt{\frac{3k^2}{3k^2-1}}$，$x_4=-\sqrt{\frac{3k^2}{3k^2-1}}$，则$|CD|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}|x_3-x_4|=2\sqrt{\frac{3(1+k^2)}{3k^2-1}}$. …… 8分



根据对称性可知四边形$ACBD$为菱形，其面积

$S_{ACBD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|$

$=2\sqrt{\frac{3(1+k^2)}{3-k^2}}\sqrt{\frac{3(1+k^2)}{3k^2-1}}$

$=6\sqrt{\frac{(1+k^2)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)}}$

$=6\sqrt{\frac{(1+k^2)^2}{16k^2-3(1+k^2)^2}}$

$=6\sqrt{\frac{1}{\frac{16k^2}{(1+k^2)^2}-3}}$. ………………………… 10分

$\because\frac{1}{3}<k^2<3$，$k^2+2+\frac{1}{k^2}\in\left[4,\frac{16}{3}\right)$，$\frac{16k^2}{(1+k^2)^2}=\frac{16}{k^2+2+\frac{1}{k^2}}\in(3,4]$，$\frac{16k^2}{(1+k^2)^2}-3\in(0,1]$，

$\therefore S_{ACBD}\in[6,+\infty)$. ………………………………… 12分

选②：假设满足题意的直线AD存在.

易知直线AD斜率存在，设直线AD的方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，$(3-k^2)\neq0$且$\Delta=4k^2m^2+4(m^2+3)(3-k^2)>0$，

解得$k^2\neq3$且$k^2<m^2+3$.

由韦达定理有$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2},\\x_1x_2=\frac{-m^2-3}{3-k^2},\end{cases}$ ………………… 6分

$|AD|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{4k^2m^2}{(3-k^2)^2}-\frac{4(-m^2-3)}{3-k^2}}$

$=\sqrt{\frac{(1+k^2)(12m^2-12k^2+36)}{(3-k^2)^2}}$.

不妨设M为直线AD与渐近线$y=\sqrt{3}x$的交点，

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\y=\sqrt{3}x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{m}{\sqrt{3}-k},\\y=\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-k},\end{cases}$ $\therefore M$点的坐标为$\left(\frac{m}{\sqrt{3}-k},\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-k}\right)$，同理可得$N$点的坐标为$\left(\frac{-m}{\sqrt{3}+k},\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}+k}\right)$.

$|MN|=\sqrt{\left(\frac{m}{\sqrt{3}-k}-\frac{-m}{\sqrt{3}+k}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-k}-\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}+k}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{12(1+k^2)m^2}{(3-k^2)^2}}$.

M,N为线段AD的三等分点，$|AD|=3|MN|$，

即$\sqrt{\frac{(1+k^2)(12m^2-12k^2+36)}{(3-k^2)^2}}=3\sqrt{\frac{12(1+k^2)m^2}{(3-k^2)^2}}$，

整理得$k^2+8m^2-3=0$. ① ………………………………… 9分

$\because AB\perp CD$，$\therefore\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DO}=0$，$x_1x_2+y_1y_2=0$.

$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\frac{-m^2-3}{3-k^2}+km\frac{2km}{3-k^2}+m^2=0$，整理得$-3k^2+2m^2-3=0$. ② …

……………………………………………………… 11分

联立①②得$k^2=-\frac{9}{13}$，无解，故没有满足条件的直线AD. ……………………………………………… 12分

22.【解析】(1)$f'(x)=(2x-a)\ln x+x-a+1$，

$\because1$是函数$f(x)$的极值点，$f'(1)=1-a+1=0$，解得$a=2$. ……………………………………………………… 2分

当$a=2$时，$f'(x)=(2x-2)\ln x+x-1=(x-1)(2\ln x+1)$.

当$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{e}},1\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$\therefore$当$x=1$时，$f(x)$取得极小值，1是$f(x)$的极小值点.

故$a=2$即为所求. ……………………………… 3分

(2)$f(x)=x((x-a)\ln x+1)$，$x>0$，$\therefore f(x)$的零点个数与$g(x)=(x-a)\ln x+1$的零点个数相同. ……

……………………………………………………… 4分

①当$a=1$时，$g(x)=(x-1)\ln x+1$，$g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$.

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

当$x=1$时，$g(x)$取得最小值$g(1)=1>0$. $\therefore g(x)$无零点，即$f(x)$无零点. ……………………………… 5分

②当$a\in(0,1)$时，$g'(x)=\ln x+1-\frac{a}{x}$. 令$h(x)=\ln x+1-\frac{a}{x}$. 又$h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}>0$恒成立，$\therefore g'(x)=h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$g'(a)=\ln a<0$，$g'(1)=1-a>0$，故存在$x_0\in(a,1)$，使得$g'(x_0)=0$；

当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当$x=x_0$时，$g(x)$取得最小值$g(x_0)=(x_0-a)\ln x_0+1$. (*)

由$g'(x_0)=\ln x_0+1-\frac{a}{x_0}=0$,得 $a=x_0(\ln x_0+1)$,代入(*)得 $g(x_0)=-x_0(\ln x_0)^2+1$.

若 $g(x)$有零点,则必有 $g(x_0)\leqslant 0$,即$(\ln x_0)^2\geqslant\frac{1}{x_0}$,也即 $\ln\frac{1}{x_0}\geqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}$.

令 $m(t)=2\ln t-t$,$m'(t)=\frac{2}{t}-1$,当 $t\in(0,2)$时,$m'(t)>0$,$m(t)$单调递增;当 $t\in(2,+\infty)$时,$m'(t)<0$,$m(t)$单调递减. $m(t)\leqslant m(2)=2\ln 2-2<0$,取 $t=\frac{1}{\sqrt{x_0}}$,$\therefore m\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}\right)<0$,即 $\ln\frac{1}{x_0}<\frac{1}{\sqrt{x_0}}$恒成立,矛盾,故 $g(x)$没有零点.

综上所述,当 $0<a\leqslant 1$ 时,$f(x)$没有零点. ………… 8 分

(3)若 $f(x)$有两个零点,则 $g(x)=(x-a)\ln x+1$ 有两个零点.由(2)可知,$a>1$.

$g'(x)=\ln x+1-\frac{a}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$g'(1)=1-a<0$,$g'(a)=\ln a>0$,故存在$x_0'\in(1,a)$,使得 $g'(x_0')=0$;

当 $x\in(0,x_0')$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当 $x\in(x_0',+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当 $x=x_0'$时,$g(x)$取得最小值 $g(x_0')=(x_0'-a)\ln x_0'+1$.(* *)

由$g'(x_0')=\ln x_0'+1-\frac{a}{x_0'}=0$,得 $a=x_0'(\ln x_0'+1)$,代入(* *)得 $g(x_0')=-x_0'(\ln x_0')^2+1$.

$g(x)$有两个零点,则必有 $g(x_0')=-x_0'(\ln x_0')^2+1<0$.

设 $n(x)=1-x(\ln x)^2(x>1)$,$n'(x)=-2\ln x-(\ln x)^2$,当 $x>1$ 时,$n'(x)<0$ 恒成立,$n(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,$n(2)=1-2(\ln 2)^2>0>n(x_0')$,$\therefore 2<x_0'$.

设 $\varphi(x)=x\ln x+x(x>1)$,$\varphi'(x)=2+\ln x$. 当 $x>1$ 时,$\varphi'(x)>0$ 恒成立,$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$a=\varphi(x_0')>\varphi(2)=2+2\ln 2\approx 3.386$. ………… 11 分

下证当 $a=4$ 时,$g(x)$有两个零点.

$g(1)=1>0$,$g(x_0')\leqslant g(\mathrm{e})=1+\mathrm{e}-4<0$,$g(a)=1>0$.

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上有两个零点,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有两个零点.

综上所述,$a=4$ 为满足题意的最小正整数值. … 12 分