1.3 正 n 边形所有边的斜率和问题

对于一个正 n 边形, 各边斜率均存在且分别为 $k_j, j=1,2,\dots,n$, 如果某边的倾斜角为 θ, 化简 $A_n=\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j}$.

下面先证明一个引理:

$$F_n(\theta)=\sum_{j=1}^{n}\tan(\theta+\frac{j\pi}{n})=\begin{cases}n\tan n\theta & 2\nmid n\\ -n\cot n\theta & 2|n\end{cases}$$

证明:

考虑 $x\in\{\theta+\frac{j\pi}{n}|j=1,2,\dots,n\}$ 的共同之处:$\tan nx=\tan n\theta$

且显然所有 $\tan x$ 是互不相同的

考虑棣莫弗公式

$$\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$$

如果 $n=2k+1$ 是奇数, 比较实部虚部可得

$$\tan n\theta=\tan nx=\frac{\sin nx}{\cos nx}\tag{1.65}$$

$$=\frac{C_{2k+1}^{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}x+\dots}{C_{2k+1}^{2k}(-1)^k\cos x\sin^{2k}x+\dots}=\frac{C_{2k+1}^{2k+1}(-1)^k\tan^{2k+1}x+\dots}{C_{2k+1}^{2k}(-1)^k\tan^{2k}x+\dots}\tag{1.66}$$

$$C_{2k+1}^{2k+1}(-1)^k\tan^{2k+1}x-\tan(2k+1)\theta\cdot C_{2k+1}^{2k}(-1)^k\tan^{2k}x+\dots=0\tag{1.67}$$

从而 $\tan(\theta+\frac{j\pi}{n})$ 是如下关于 y 的 $2k+1$ 次方程的 $2k+1$ 个不同根

$$C_{2k+1}^{2k+1}(-1)^ky^{2k+1}-\tan(2k+1)\theta\cdot C_{2k+1}^{2k}(-1)^ky^{2k}+\dots=0$$

韦达定理可得这些根的和

$$F_n(\theta)=-\frac{-\tan(2k+1)\theta\cdot C_{2k+1}^{2k}(-1)^k}{C_{2k+1}^{2k+1}(-1)^k}=(2k+1)\tan(2k+1)\theta=n\tan n\theta$$

如果 $n=2k$ 是偶数, 那么按照同样的操作同理可得 $\tan(\theta+\frac{j\pi}{n})$ 是如下关于 y 的 $2k$ 次方程的 $2k$ 个不同根

$$C_{2k}^{2k}(-1)^ky^{2k}-\cot 2k\theta\cdot C_{2k}^{2k-1}(-1)^{k-1}y^{2k-1}+\dots=0$$

韦达定理可得

$$F_n(\theta)=-\frac{-\cot 2k\theta\cdot C_{2k}^{2k-1}(-1)^{k-1}}{C_{2k}^{2k}(-1)^k}=-2k\cot 2k\theta=-n\cot n\theta$$

综上可知

$$F_n(\theta)=\sum_{j=1}^{n}\tan(\theta+\frac{j\pi}{n})=\begin{cases}n\tan n\theta & 2\nmid n\\ -n\cot n\theta & 2|n\end{cases}$$

接着证明原题:

不妨设第 j 边倾斜角为 $x_j=\theta+\frac{2j\pi}{n}$,(不管倾斜角 $[0,\pi)$ 的取值范围, 求正切以后无影响)

$$f_n(\theta)=\sum_{j=1}^{n}\tan(\theta+\frac{2j\pi}{n})$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}\cot(\theta+\frac{2j\pi}{n})=\sum_{j=1}^{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{2j\pi}{n})=f_n(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

待求式即为 $A_n=f_n(\theta)f_n(\frac{\pi}{2}-\theta)$

若 $n=2k+1$ 是奇数, 则易得任意两个边倾斜角的差都不是 π 的整数倍, 所以求正切后互不相同, 是 $\theta+\frac{j\pi}{n}$ 的重新排列

亦即 $f_n(\theta)=F_n(\theta)$

$$f_n(\frac{\pi}{2}-\theta)=n\tan n(\frac{\pi}{2}-\theta)=n\tan(k\pi+\frac{\pi}{2}-n\theta)=n\cot n\theta$$

于是待求为

$$A_n=f_n(\theta)f_n(\frac{\pi}{2}-\theta)=(n\tan n\theta)\,(n\cot n\theta)=n^2$$

若 $n=2k$ 是偶数, 则 $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 的正切刚好取遍 $\tan(\theta+\frac{j\pi}{k}),j=1,2,\ldots,k$, 而 $\tan x_{k+j}=\tan x_j$

所以 $f_{2k}(\theta)=2F_k(\theta), f_{2k}(\frac{\pi}{2}-\theta)=2F_k(\frac{\pi}{2}-\theta)$, 待求式为

$$A_n=f_{2k}(\theta)f_{2k}(\frac{\pi}{2}-\theta)=4F_k(\theta)F_k(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

如果 k 是奇数, 如上可得

$$A_n=4k^2=n^2$$

如果 $k=2m$ 是偶数, 那么 $n=4m$

$$A_n=4F_{2m}(\theta)F_{2m}(\frac{\pi}{2}-\theta)=4\cdot(-2m\cot 2m\theta)\cdot(-2m\cot 2m(\frac{\pi}{2}-\theta))=-n^2\cot^2\frac{n\theta}{2}$$

综上可得

$$A_n=\begin{cases}-n^2\cot^2\dfrac{n\theta}{2} & 4|n\\ n^2 & else\end{cases}$$